ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

Corso Ordinamento Indirizzo: Scientifico Tema di: MATEMATICA
simulazione **1**

Il candidato risolva SOLO uno dei due problemi e risponda SOLO a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

In un sistema di riferimento (0xy) sia data la funzione $f(x) = x^2 e^x$

1) Studiare la funzione e disegnarne il grafico.
2) Determinare l'equazione della retta tangente **t** nel punto di ascissa x=1.
3) Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra la curva, la retta tangente e l'asse delle ascisse.
4) Si consideri la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} - 1$, verificare che per tale funzione è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo [-1; 1] e determinare il punto o i punti c che verificano la tesi del teorema.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento (0xy) siano date le funzioni:

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ e $g(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

1) Studiare le funzioni e disegnarne i grafici nello stesso piano cartesiano.
2) Verificare che hanno solo due punti in comune A e B.
3) Trovare l'area della regione di piano compresa tra le due curve.
4) Trovare le equazioni delle rette tangenti alle due curve nei loro punti comuni.
5) Calcolare l'area del quadrilatero convesso individuato dalle rette tangenti.

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile e non grafica.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

QUESTIONARIO

1) Si dia la definizione di rapporto incrementale di una funzione in un punto accompagnando la definizione dalla sua rappresentazione grafica, e si calcoli il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ nel punto $x_0 = 2$.

2) Trovare la primitiva della funzione: $f(x) = e^{x^2+4x+4}\,(x+2)$ passante per il punto (-2; 0)

3) Individuare e classifica gli eventuali punti di non derivabilità della seguente funzione: $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$

4) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{3x^2-2x+1}{2x+5}}$

5) Verificare che la funzione: $f(x) = x^3 + 1$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2;\ 2]$ e trovare il o i valori medi assicurati dal teorema.

6) Calcolare l'insieme di definizione della seguente funzione: $f(x) = ln\left(x^{\sqrt{2}} - 1\right)$

7) Verificare che la funzione $f(x) = 3\,\mathrm{atan}\,x - \mathrm{atan}\,\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ è costante nel suo dominio.

8) Trovare le equazioni delle rette tangenti della seguente funzione: $f(x) = \frac{\pi \sin x}{x}$ nei punti π e $-\pi$, verificare che le tangenti sono perpendicolari tra loro.

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile e non grafica.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Soluzioni

PROBLEMA 1

1) $f'(x) = xe^x(x+2)$ $f''(x) = e^x(x^2+4x+2)$ $F(x) = e^x(x^2-2x+2)+c$

2) t: $y = 3ex - 2e$

3) Area= $\frac{5e-12}{6}$

4) c = 0

PROBLEMA 2

1) $f'(x) = 3x^2+6x+3$ $f''(x) = 6x+6$ $F(x) = \frac{x^4}{4}+x^3+\frac{3}{2}x^2+x+c$

$g'^{(x)} = 3x^2-6x-3$ $g''^{(x)} = 6x-6$ $G(x) = \frac{x^4}{4}-x^3-\frac{3}{2}x^2+x+c$

2) A(-1; 0) B(0; 1)

3) Area= 1

4) Y=3x+1 y=0 y=-3x+1 y=6x+6

5) Area= $\frac{13}{9}$

Soluzioni

QUESTIONARIO

1) Rapporto incrementale della funzione $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ nel punto $x_0=2$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3}{1+h}$$

2) $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2+4x+4}-\frac{1}{2}$

3) Punti di non derivabilità della seguente funzione: $f(x)=\sqrt[5]{x^2-1}$

$x=-1$ flesso a tangente verticale decrescente

$x=1$ flesso a tangente verticale crescente

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{3x^2-2x+1}{2x+5}}=0$

5) $c_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ $\quad c_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$

6) Calcola l'insieme di definizione di: $f(x)=ln\left(x^{\sqrt{2}}-1\right)$ $\quad x>1$

7) Bisogna calcolare da derivata prima della funzione e verificare che sia nulla. Dopo alcuni passaggi la derivata prima si presenta in questa forma:

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{3x^4+6x^2+3}{x^6+3x^4+3x^2+1}$ il denominatore della seconda frazione si scompone come $(1+x^2)^3$ per cui calcolando il m.c.m. il numeratore si annulla e si ha che $f'(x)=0$, quindi essendo la derivata prima nulla $\forall x\in D$ la funzione risulta essere costante.

8) $y=-x+\pi$ $\quad y=x+\pi$

Liceo Scientifico Tito Lucrezio Caro Napoli

ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

Corso Ordinamento Indirizzo: Scientifico Tema di: MATEMATICA
simulazione **2**

Il candidato risolva SOLO uno dei due problemi e risponda SOLO a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

1) Si studi la funzione $f(x) = \frac{1+x^3}{x^2}$ e se ne disegni il grafico.
2) Determinare l'equazione della retta **t** tangente alla funzione nel suo punto A di ordinata nulla.
3) Sia C l'ulteriore punto di incontro tra la retta **t** e il grafico della funzione
4) Determinare l'equazione della retta ***s*** tangente alla funzione nel suo punto B di ascissa 2 e verificare che la retta ***s*** passa per il punto A.
5) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione e dal segmento BC.

PROBLEMA 2

1) Si studi la funzione: $f(x) = x \cdot \sqrt{x-2}$ e se ne disegni il grafico.
2) Trovare l'equazione della retta normale **n** passante per il punto di flesso della funzione.
3) Calcolare l'area della regione di piano compresa tra la $f(x)$, la retta normale **n** e l'asse delle ascisse.
4) Verificare che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo compreso tra il punto di minimo del dominio e l'ascissa del punto di flesso della funzione e trovare il o i valori c assicurati dalla tesi del teorema.

QUESTIONARIO

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile e non grafica.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

1) Determinare gli asintoti della seguente funzione: $f(x) = e^x - x$

2) Si dia la definizione di punto di accumulazione per un insieme e si discuta la relazione tra l'appartenenza ad un insieme e l'essere di accumulazione per l'insieme stesso. Si forniscano esempi numerici a supporto di quanto illustrato.

3) Studiare la continuità e la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x| & se -1 < x < 1 \\ \dfrac{x^2}{2} & se\ x \geq 1 \\ x^2 - 1 & se\ x \leq -1 \end{cases}$$

4) Data la funzione: $f(x) = kx - \frac{x^3}{1+x^2}$ trovare il valore di k affinché la funzione abbia un punto stazionario in $x = -2$.

5) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 0^+} \frac{ln(sin5x)}{ln(sin3x)}$

6) Calcolare l'insieme di definizione della seguente funzione: $f(x) = ln\left(x^{-\sqrt{2}} - 1\right)$

7) Sia data la funzione: $f(x) = ax^2 + bx$ determinare i valori di a e b affinché il punto $P(1; -1)$ risulti un punto stazionario per tale funzione.

8) Determinare $k \in R$ in modo che la tangente alla parabola $y = kx^2 - (k+1)x + 2$ nel punto di ascissa $x = 2$ sia:

a) parallela alla retta $y = -3x + 1$ b) perpendicolare alla retta $y = \frac{1}{4}x - 7$

Soluzioni

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile e non grafica.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1) $f'(x) = \frac{x^3-2}{x^3}$ $\quad f''(x) = \frac{6}{x^4}$ $\quad F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c$

2) retta t: $y = 3x + 3.$

3) $A(-1;0)$ $\quad B\left(2;\ \frac{9}{4}\right)$ $\quad C\left(\frac{1}{2};\ \frac{9}{2}\right)$

4) retta s: $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

5) Area= $\mathbf{\frac{27}{16}}$

PROBLEMA 2

1) $f'(x) = \frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}$ $\quad f''(x) = \frac{3x-8}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$ $\quad F(x) = \frac{6x+8}{15}\ (x-2)\sqrt{x-2} + c$

2) $Flesso$ $\left(\frac{8}{3};\ \frac{8\sqrt{6}}{9}\right)$ $\quad y = \frac{-\sqrt{6}}{6}x + \frac{4}{3}\sqrt{6}$

3) $A = \frac{16}{45}\sqrt{6} + \frac{64}{27}\sqrt{6}$

4) Teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[2;\ \frac{8}{3}\right]$ $\quad c = \frac{100-16\sqrt{7}}{27}$

Soluzioni

QUESTIONARIO

1) $y = -x$

2) Un punto si dice di accumulazione per un insieme se ogni intorno del punto contiene almeno un elemento dell'insieme distinto dal punto stesso.

L'appartenenza di un punto ad un insieme è indipendente dall'essere o meno di accumulazione per l'insieme stesso.

3) Punti di discontinuità: 0 II specie e 1 I specie.

Punto di non derivabilità: -1 punto angoloso.

4) $k = \frac{28}{25}$

5) $\lim_{x \to 0^+} \frac{ln(sin5x)}{ln(sin3x)} = 1$

6) Calcola l'insieme di definizione di: $f(x) = ln\left(x^{-\sqrt{2}} - 1\right)$ $\mathbf{0 < x < 1}$

7) $a = 1 \quad b = -2$

8) a) $k = -\frac{2}{3}$ b) $k = -1$

Liceo Scientifico Tito Lucrezio Caro Napoli

ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

Corso Ordinamento Indirizzo: Scientifico Tema di: MATEMATICA

simulazione 3

Il candidato risolva SOLO uno dei due problemi e risponda SOLO a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

1) Studiare la funzione $f(x) = \ln x\,(\ln x + 1)$ e disegnarne il grafico.
2) Trovare l'equazione della retta normale **n** nel punto di flesso della funzione.
3) Calcolare la somma delle aree della regione finita di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse e della regione finita di piano compresa tra la funzione, la retta normale **n** e l'asse delle ascisse.
4) In quanti punti le retta normale **n** incontra i grafici della funzione e della sua derivata seconda (dedurre la risposta attraverso considerazioni grafiche).

PROBLEMA 2

1) Studiare la funzione $f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$ e la sua primitiva $F(x)$ che assume lo stesso valore di $f(x)$ in $x = 1$, disegnare i grafici delle due funzioni nello stesso piano cartesiano ortogonale $(0xy)$.
2) Determinare le coordinate dei punti comuni alle due curve indicando con A quello di ascissa negativa e con B quello di ascissa positiva. Trovino le equazioni delle rette tangenti in A e B alle due curve.
3) Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra le due curve e la retta di equazione $x = -3$.
4) Si consideri l'intervallo chiuso di estremi il punto di intersezione, con l'asse delle ascisse della retta tangente in A alla $F(x)$ e come secondo estremo l'ascissa del punto A. Verificare che in tale intervallo sono verificate le ipotesi del teorema della media per la $f(x)$ e si trovi il valore medio assicurato dalla tesi del teorema. Si trovi infine l'ascissa del valore medio, verificando che sia interno all'intervallo individuato precedentemente.

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile e non grafica.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

QUESTIONARIO

1) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{\tan x - \sin x}$

2) Considerata la funzione $f(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ verificare che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0;\ ln2]$ e trovare gli eventuali punti **c** che soddisfano la tesi del teorema.

3) Calcolare il coefficiente angolare della retta normale alla funzione:

   $f(x) = lnx + atanx + \sqrt{x}$ nel punto di ascissa 1

4) Considerata la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ individuare e classificare i punti di non derivabilità

5) Determinare i valori dei parametri a e b che rendono continua la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x \quad se\ x < -\frac{\pi}{2} \\ \mathrm{a}\sin x + b \quad se\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \cos x \quad se\ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

6) Trovare gli zeri della seguente funzione: $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x^2$

7) Calcolare la derivata prima della funzione: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\cos x}{4x^2+2x+1}}$ nel punto $x_0 = 0$

8) Determinare le equazioni degli asintoti della funzione: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$

Durata massima della prova: 6 ore.
E' consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile e non grafica.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Soluzioni

PROBLEMA 1

1) $f'(x) = \frac{2\ln x+1}{x}$ $\quad f''(x) = \frac{1-2\ln x}{x^2}$ $\quad F(x) = x(ln^2 x - \ln x + 1) + c$

2) $F\left(\sqrt{e}; \frac{3}{4}\right)$ $\quad y = -\frac{\sqrt{e}}{2}x + \frac{2e+3}{4}$ $\quad m\left(\frac{\sqrt{e}}{e}; -\frac{1}{4}\right)$

3) Area $= -\frac{e-3}{e} + \frac{3\sqrt{e}-4}{4} + \frac{9\sqrt{e}}{16e}$

4) 4 punti

PROBLEMA 2

1) $F(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$ $\quad f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ $\quad f''(x) = \frac{6}{x^4}$

2) $A(-1;2)\ B(1;2)$ $\quad t_1: y = 2x + 4$ $\quad t_2: y = -2x + 4$ $\quad t_3: y = 2x$

3) $Area = \frac{8}{3} - \ln 3$

4) $f(c) = \frac{3}{2}$ $\quad c = -\sqrt{2}$

Soluzioni

QUESTIONARIO

1) $-\infty$

2) Considerata la funzione $f(x) = e^{2x} - 3e^{x} + 2$ verifica che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0; ln2]$. $\boldsymbol{c = ln\frac{3}{2}}$

3) Calcola il coefficiente angolare della retta normale alla funzione:

$f(x) = lnx + atanx + \sqrt{x}$ nel punto di ascissa 1 $\boldsymbol{m = -\frac{1}{2}}$

4) $x = 0$ cuspide con vertice in basso

5) $a = -1 \quad b = 1$

6) $x = 1 \quad x = e^2$

7) $f'(0) = -\frac{2}{3}$

8) per $x \to +\infty \quad y = 0$ per $x \to -\infty \quad y = -2x$