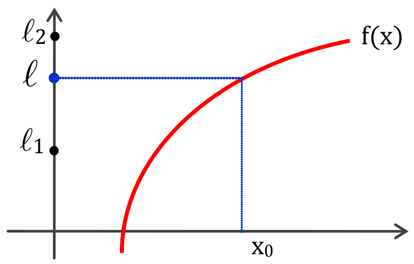
Principali teoremi di Analisi

teoremi sui limiti

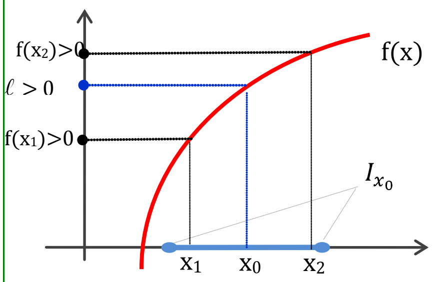


teorema di unicità del limite

Se una funzione in un punto è dotata di limite

allora esso è unico

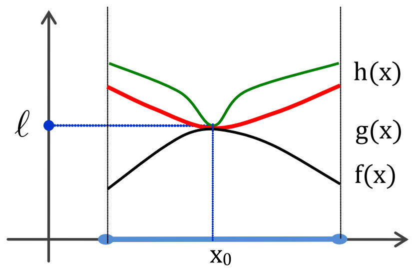
Dalla definizione di funzione, basta ricordare che ad ogni valore della x deve corrispondere uno ed un solo valore della y. Quindi, se per assurdo la funzione f(x) avesse nello stesso punto x_0 due limiti diversi, essa non sarebbe più una funzione e ciò contraddice l'ipotesi del teorema



teorema della permanenza del segno

Se una funzione in un punto x_0 è dotata di limite $\ell \neq 0$

allora esiste almeno un intorno I di x_0 tale che per tutti i punti di I (escluso al più x_0) i valori della funzione hanno lo stesso segno del limite



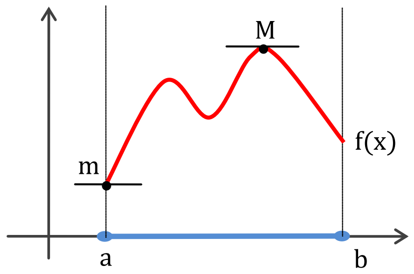
teorema del confronto detto anche dei "carabinieri"

Date tre funzioni f(x) , g(x), h(x):

1. **se** esiste un intorno I del punto x_0 in cui g(x) è compresa tra f(x) e h(x) in tutti i punti dell'intorno I escluso al più x_0 stesso
2. **se** f(x) e h(x) tendono nel punto x_0 allo stesso limite finito ℓ

allora anche g(x) avrà in x_0 limite uguale ad ℓ

teoremi sulle funzioni continue

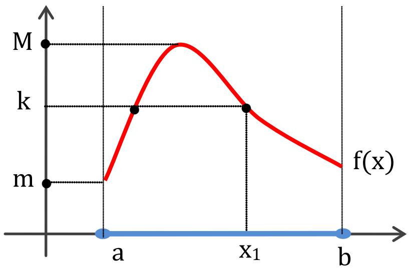


teorema di Weierstrass

Se una funzione f(x) è continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b]

allora è dotata di massimo e minimo (assoluti)

Osserva che un massimo o minimo assoluto non deve necessariamente essere un massimo o un minimo relativo: vedi, ad esempio, il punto **m** sul grafico che è un minimo assoluto e non un minimo relativo

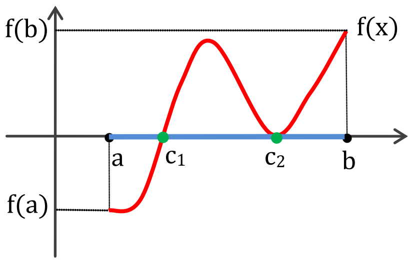


teorema dei valori intermedi o di Bolzano

Se una funzione f(x) è continua in un intervallo chiuso e limitato [a, b]

allora assume tutti i valori compresi tra il suo minimo "m" ed il suo massimo "M"

In altre parole, il teorema afferma che ogni punto k dell'intervallo [m, M] è immagine di almeno un punto (x_1,...) dell'intervallo [a, b]



teorema degli zeri

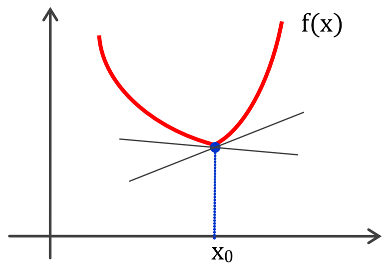
Se una funzione f(x):

1. è continua in un intervallo chiuso e limitato [a, b]
2. e assume valori di segno opposto in a e b cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo]a, b[in cui la funzione si annulla cioè $f(c) = 0$

Principali teoremi di Analisi

teoremi sul calcolo differenziale



teorema sulla relazione tra derivabilità e continuità

Se una funzione f(x) è derivabile in un punto x_0

allora la funzione è ivi anche continua

Si osservi che il teorema non si può invertire, infatti: nel punto angoloso x_0 della figura la funzione è continua ma non derivabile in quanto la derivata sinistra è diversa dalla derivata destra

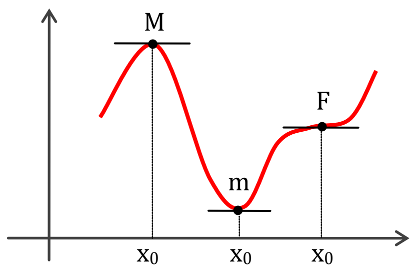
teorema sulla derivata della funzione inversa

il teorema può essere utilizzato per calcolare la derivata di funzioni inverse. Si voglia ad esempio calcolare la derivata di $\boldsymbol{y} = \sqrt{x}$ inversa della funzione $x = y^2$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{D\,y^2} = \frac{1}{2\boldsymbol{y}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Se una funzione è derivabile in x_0 e la sua derivata è diversa da zero, **allora** anche la funzione inversa $x = f^{-1}(x_0)$ è derivabile nel punto corrispondente $y_0 = f(x_0)$ e si ha:

$$Df^{-1}(x_0) = \frac{1}{Df(x_0)}$$

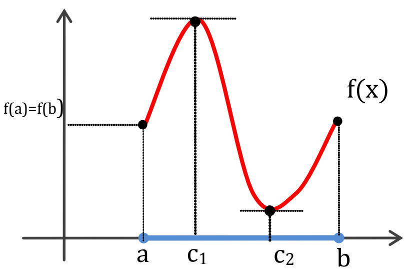


teorema sui massimi e minimi di una funzione (di Fermat)

Se una funzione f(x) ammette un massimo o un minimo relativo in un punto x_0 se f(x) è derivabile in x_0

allora la derivata prima in x_0 è nulla cioè $f'(x_0) = 0$

Il teorema non si può invertire infatti i punti in cui la derivata prima è nulla, cioè $f'(x_0) = 0$, detti **punti stazionari** , possono essere punti di **massimo**, di **minimo** o di **flesso orizzontale**

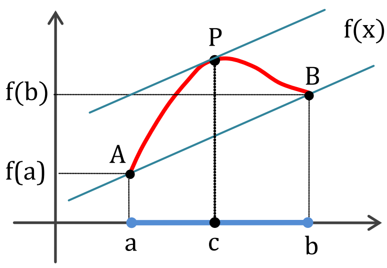


teorema di Rolle

Se una funzione f(x) è:

1. continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b]
2. derivabile nei punti interni dell'intervallo]a, b[
3. e assume valori uguali agli estremi dell'intervallo cioè f(a) = f(b)

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo in cui la derivata prima si annulla cioè $f'(c) = 0$



teorema di Lagrange

Se una funzione f(x) è:

1. continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b]
2. e derivabile nei punti interni dell'intervallo]a, b[

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

teorema di Cauchy

il teorema è detto degli **incrementi finiti** e si può enunciare anche dicendo: se le funzioni f(x) e g(x) verificano le ipotesi indicate, in un opportuno punto c dell'intervallo]a, b[il rapporto tra le rispettive derivate in c è uguale al rapporto tra gli **incrementi** delle funzioni calcolate agli estremi a e b dell'intervallo [a, b]

Se f(x) e g(x) sono funzioni:

1. continue nell'intervallo chiuso e limitato [a, b]
2. derivabili nei punti interni dell'intervallo]a, b[
3. e inoltre $g'(x) \neq 0$ in ogni punto interno dell'intervallo]a, b[

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo]a, b[tale che:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Principali teoremi di Analisi

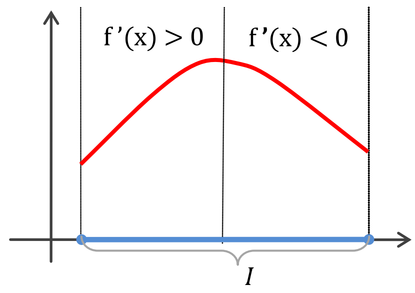
teorema di de L'Hopital

Se f(x) e g(x) sono funzioni:
1. derivabili in un intorno I di x_0
2. con derivate continue e $g'(x) \neq 0$ in detto intorno
3. il limite del loro rapporto si presenta nella forma $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

allora $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si osservi che:
1. il teorema si estende anche al caso in cui $x \to \infty$ e il imite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$
2. il teorema, quando opportuno, può essere applicato più volte consecutivamente

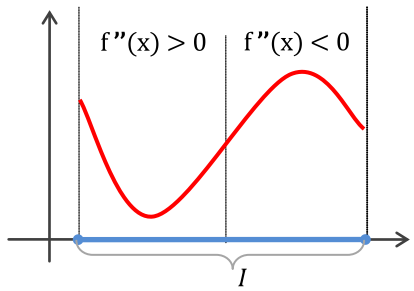
teorema sulla monotonia di una funzione in un intervallo



Se una funzione f(x) è continua in un intervallo chiuso I e derivabile nei punti interni di I e se la derivata prima in I è positiva (negativa)
allora la funzione f(x) è crescente (decrescente) nell'intervallo I

vale anche il teorema inverso cioè
Se la funzione è crescente (decrescente) in un intervallo I
allora la derivata prima in tale intervallo sarà positiva (negativa)

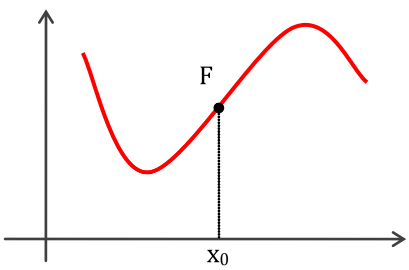
teorema sulla concavità di una funzione in un intervallo



Se una funzione f(x) è derivabile due volte nei punti interni di un intervallo I e se la derivata seconda è positiva (negativa)
allora la funzione è concava verso l'alto (il basso) nell'intervallo I

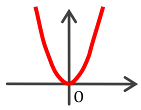
vale anche il teorema inverso cioè
Se la funzione è concava verso l'alto (il basso) in un intervallo I
allora la derivata seconda sarà positiva (negativa)

teorema sui flessi di una funzione



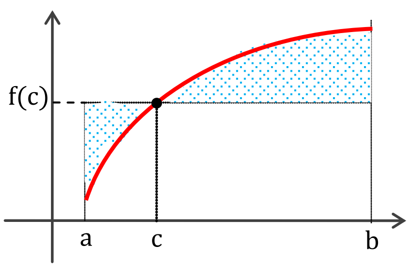
Se una funzione f(x) è dotata di derivata prima e di derivata seconda continua in x_0 e se tale punto è un flesso
allora la derivata seconda in x_0 è nulla, cioè $f''(x_0) = 0$

Il teorema non si può invertire, basti pensare alla funzione $y=x^4$ che nell'origine degli assi cartesiani ha derivata seconda uguale a 0: $f''(x^4) = 12x^2$ che calcolata in 0 risulta nulla. In tale punto però non vi è un flesso, bensì un punto di minimo come illustrato nel disegno affianco



teoremi sul calcolo integrale

teorema della media



Se una funzione f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [a, b],
allora esiste almeno un punto c appartenente all'intervallo [a, b] tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$

teorema fondamentale del calcolo integrale

Se f(x) è una funzione continua in [a, b] ed $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ una funzione detta *funzione integrale*
allora esiste la derivata prima della funzione integrale in ogni punto x dell'intervallo [a, b] e si ha: $F'(x) = f(x)$

In altre parole il teorema, nell'ipotesi indicata, afferma che la funzione integrale è una primitiva di f(x)

dal teorema deriva la formula che permette di calcolare il valore dell'integrale definito di una funzione f(x) conoscendo una sua primitiva F(x):

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$