Teorema inverso sul parallelogramma

enunciato

Se un quadrilatero ha:

a) i lati opposti congruenti **oppure**

b) gli angoli opposti congruenti **oppure**

c) le diagonali che si incontrano nel loro punto medio **oppure**

d) due lati congruenti e paralleli

allora il quadrilatero è un parallelogramma

Hp: a) $AB \cong DC$ e $AD \cong BC$

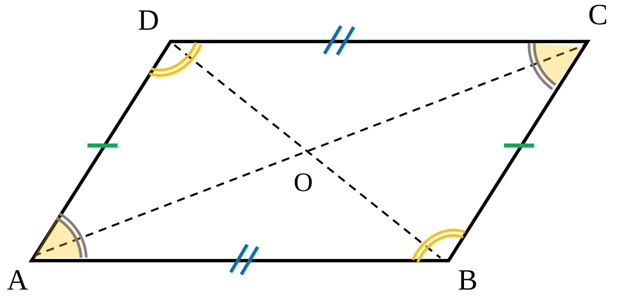
b) $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$

c) $AO \cong OC$ e $DO \cong OB$

d) $AB \cong DC$ e $AB \parallel DC$ **oppure**

$AD \cong BC$ e $AD \parallel BC$

Th: $AB \parallel DC$ e $AD \parallel BC$



dimostrazione del punto a)

Dimostriamo che se un quadrilatero ha i lati opposti congruenti, allora è un parallelogramma.

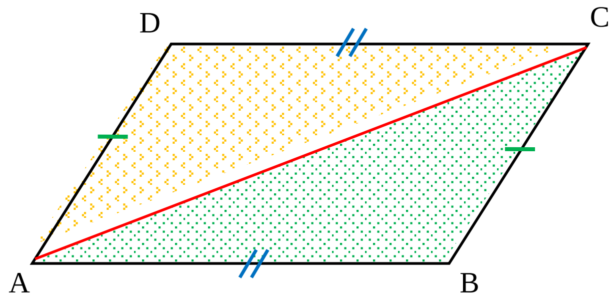
Consideriamo la diagonale AC del quadrilatero.

Consideriamo i triangoli ACD e ABC.

Essi hanno:

- $AB \cong DC$ per ipotesi
- $AD \cong BC$ per ipotesi
- il lato AC è in comune.

I due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli.

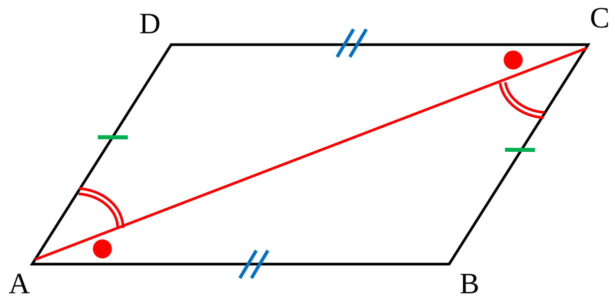


Due triangoli congruenti hanno gli elementi corrispondenti congruenti. In particolare sono congruenti gli angoli:

- $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}D$
- $D\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$.

Le rette AB e DC sono dunque parallele perché con la trasversale AC formano gli angoli alterni interni congruenti $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}D$

Le rette AD e BC sono dunque parallele perché con la trasversale AC formano gli angoli alterni interni congruenti $D\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$.



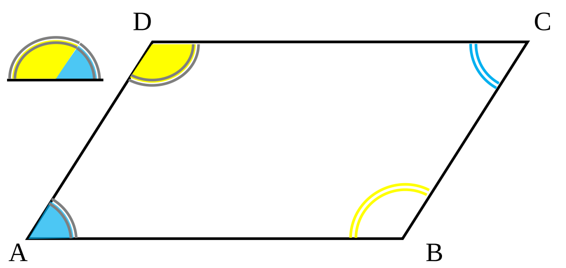
Teorema inverso sul parallelogramma

dimostrazione del punto b)

Dimostriamo che se un quadrilatero ha gli angoli opposti congruenti, allora è un parallelogramma.

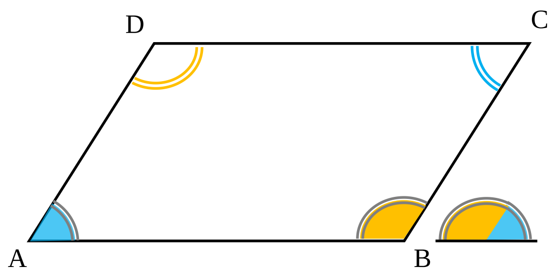
Per ipotesi si ha che $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$. Inoltre si sa che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360°, per cui $2\hat{A} + 2\hat{D} \cong 360°$ dividendo per 2 si ha che $\hat{A} + \hat{D} \cong 180°$.

Le rette AB e DC sono dunque parallele perché formano con la trasversale AD angoli coniugati interni supplementari.



Analogamente si ha che $2\hat{A} + 2\hat{B} \cong 360°$ dividendo per 2 si ha che $\hat{A} + \hat{B} \cong 180°$.

Anche le rette AD e BC sono parallele perché formano con la trasversale AB angoli coniugati interni supplementari.



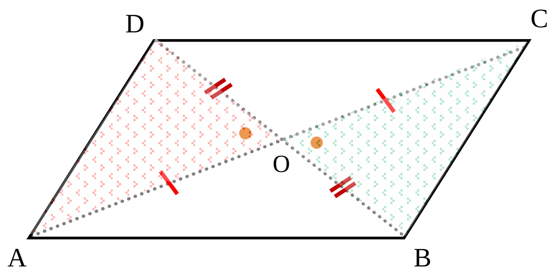
dimostrazione del punto c)

Dimostriamo che se le diagonali si incontrano nel loro punto medio, allora il quadrilatero è un parallelogramma.

Consideriamo i triangoli AOD e COB. Essi hanno :

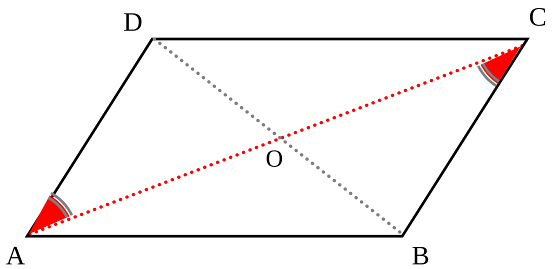
- $AO \cong OC$ per ipotesi
- $DO \cong OB$ per ipotesi
- $A\hat{O}D \cong B\hat{O}C$ perché angoli opposti al vertice.

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.



Due triangoli congruenti hanno gli elementi corrispondenti congruenti. In particolare l'angolo $O\hat{A}D$ è congruente all'angolo $O\hat{C}B$.

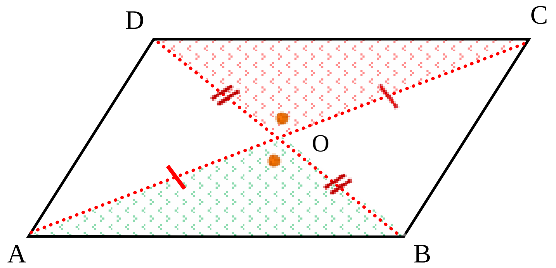
Le rette AD e BC sono dunque parallele perché con la trasversale AC formano angoli alterni interni congruenti.



Consideriamo i triangoli DOC e AOB. Essi hanno:

- $AO \cong OC$ per ipotesi
- $DO \cong OB$ per ipotesi
- $C\hat{O}D \cong A\hat{O}B$ perché angoli opposti al vertice.

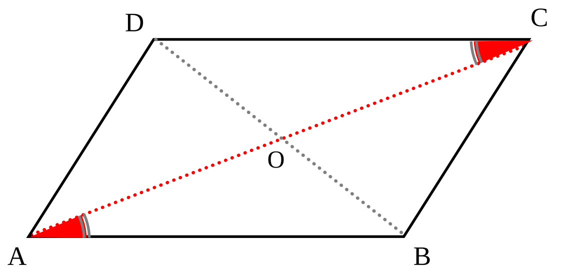
I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.



Teorema inverso sul parallelogramma

Due triangoli congruenti hanno gli elementi corrispondenti congruenti. In particolare l'angolo $O\hat{A}B$ è congruente all'angolo $O\hat{C}D$.

Le rette AB e DC sono allora parallele perché con la trasversale AC formano angoli alterni interni congruenti.



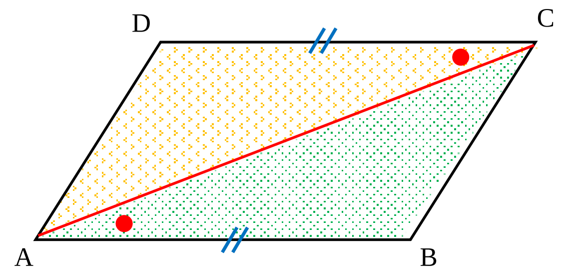
dimostrazione del punto d)

Dimostriamo che se un quadrilatero ha due lati congruenti e paralleli allora è un parallelogramma.

Supponiamo che i lati AB e DC sono congruenti e paralleli.

Tracciamo la diagonale AC e consideriamo i triangoli ABC e ACD. Essi hanno:

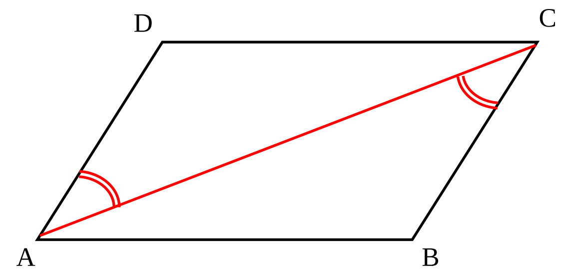
- $AB \cong DC$ per ipotesi
- AC in comune
- $C\hat{A}B \cong A\hat{C}D$ perché alterni interni delle parallele AB e DC tagliate dalla trasversale AC.



I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.

Due triangoli congruenti hanno gli elementi corrispondenti congruenti. In particolare l'angolo $D\hat{A}C$ è congruente a $B\hat{C}A$.

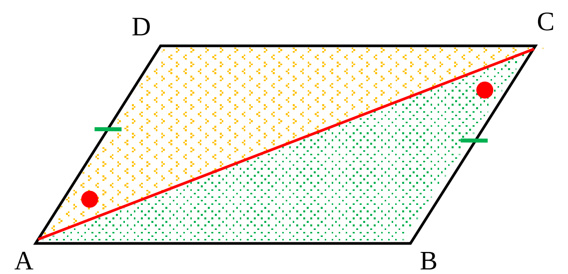
Le rette AD e BC sono allora parallele perché con la trasversale AC formano angoli alterni interni congruenti.



Supponiamo che i lati AD e BC sono congruenti e paralleli.

Tracciamo la diagonale AC e consideriamo i triangoli ABC e ACD. Essi hanno:

- $AD \cong BC$ per ipotesi
- AC in comune
- $C\hat{A}D \cong B\hat{C}A$ perché alterni interni delle parallele AB e DC tagliate dalla trasversale AC.



I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.

Due triangoli congruenti hanno gli elementi corrispondenti congruenti. In particolare l'angolo $C\hat{A}B$ è congruente a $A\hat{C}D$.

Le rette AB e DC sono allora parallele perché con la trasversale AC formano angoli alterni interni congruenti.