Teorema di Rolle

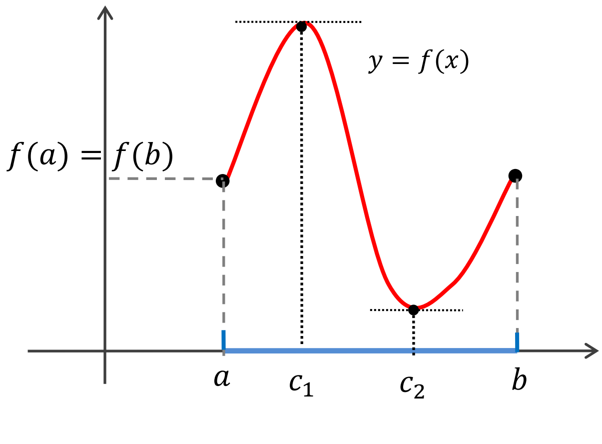
enunciato

Se una funzione $f(x)$:

- è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$
- è derivabile nei punti interni dell'intervallo (a, b)
- assume valori uguali agli estremi dell'intervallo cioè $f(a) = f(b)$

allora esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ interno all'intervallo (a, b) in cui la derivata prima si annulla, cioè

$$\boldsymbol{f'(c) = 0}$$

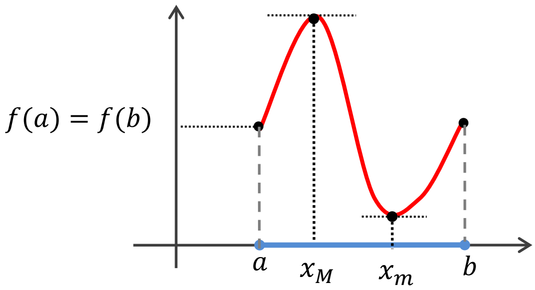


dimostrazione

La prima ipotesi del teorema di Rolle è la stessa del teorema di Weierstrass, per cui la funzione $f(x)$ ammette un massimo e un minimo assoluto nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$.
Chiamiamo x_m l'ascissa del punto di minimo assoluto e x_M l'ascissa del punto di massimo assoluto.
Si possono presentare tre casi:

primo caso

Entrambi i punti x_M e x_m sono interni all'intervallo (a, b).
Per il teorema di Fermat, nei punti di massimo e di minimo la derivata prima della funzione si annulla cioè: $\boldsymbol{f'(x_m) = 0}$ ***e*** $\boldsymbol{f'(x_M) = 0}$
Posto $\boldsymbol{c_1} = x_m$ e $\boldsymbol{c_2} = x_M$ si ha la tesi

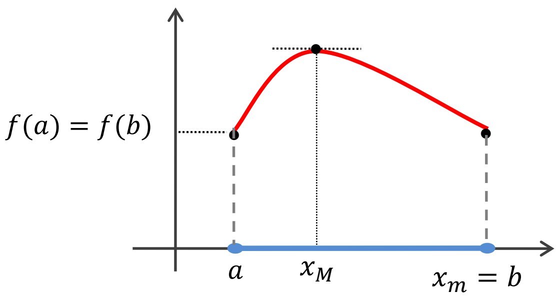


secondo caso

Solo uno dei due punti x_m o x_M è interno all'intervallo (a, b). Ad esempio sia x_M il punto di massimo interno e l'altro coincidente con uno degli estremi dell'intervallo.
Anche in questo caso per il teorema di Fermat, la derivata prima della funzione in x_M è nulla, cioè:

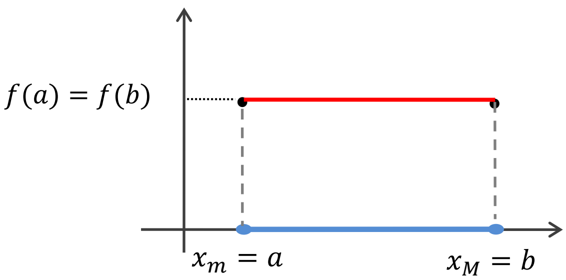
$$\boldsymbol{f'(x_M) = 0}$$

Posto $\boldsymbol{c} = x_M$ si ha la tesi



terzo caso

Entrambi i punti x_m e x_M sono agli estremi dell'intervallo $[a, b]$.
Sia $x_m = a$ ed $x_M = b$ allora la funzione sarà costante in tutto l'intervallo quindi la sua derivata prima è nulla in tutti i punti dell'intervallo (a, b), da cui la tesi



In sintesi: il teorema di Weierstrass assicura la presenza di un massimo e di un minimo assoluto nell'intervallo $[a, b]$ e in tali punti per il teorema di Fermat la derivata prima in tali punti è uguale a zero.