

## triangoli inscritti e circoscritti

|   |  |
|---|--|
| 1 | Dimostra che ogni trapezio isoscele con il lato obliquo congruente alla semisomma delle basi è circoscrittibile ad una circonferenza.  |
| 2 | Dimostra che, se in un triangolo il centro della circonferenza inscritta coincide con il centro della circonferenza circoscritta, il triangolo dato è equilatero.  |
| 3 | Data una circonferenza $\gamma$ di centro $O$ , sia $ABC$ un triangolo inscritto in essa e sia $H$ il piede della perpendicolare condotta da $C$ ad $AB$ . Dimostra che $\widehat{ACH} \cong \widehat{OCB}$ .  |
| 4 | Dimostra che il punto di incontro delle tre bisettrici di un triangolo è il centro del cerchio inscritto in esso.  |
| 5 | Dimostra che, se il centro della circonferenza inscritta in un triangolo $ABC$ appartiene all'altezza relativa ad $AB$ , allora il triangolo $ABC$ è isoscele sulla base $AB$ .  |
| 6 | Considera un triangolo isoscele $ABC$ di vertice $C$ , circoscritto ad un cerchio di centro $O$ ; siano $Q$ e $P$ i punti di tangenza con i due lati congruenti $CB$ e $AC$ e sia $R$ il punto di tangenza con la base. Dimostra che il perimetro del triangolo dato è congruente a $4QB + 2QC$ .          |
| 7 | Considera un triangolo rettangolo circoscritto a una circonferenza. Dimostra che il diametro della circonferenza è congruente alla differenza fra l'ipotenusa e la somma dei cateti.   |
| 8 | Dimostra che, a seconda che un triangolo sia acutangolo, ottusangolo, rettangolo, il centro della circonferenza circoscritta al triangolo cade nell'interno, esternamente o sul contorno del triangolo.  |
| 9 | Nel triangolo rettangolo $ABC$ considera la circonferenza inscritta e la circonferenza circoscritta. Dimostra che il diametro della circonferenza inscritta è congruente alla differenza tra la somma dei cateti e l'ipotenusa. Dimostra che la somma dei due diametri è congruente alla somma dei cateti. |

## quadrilateri inscritti e circoscritti

|    |  |
|----|--|
| 10 | Il quadrilatero ABCD ha gli angoli in $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ che misurano rispettivamente $65^\circ$ e $117^\circ$ ; calcola il valore delle ampiezze degli altri angoli sapendo che il quadrilatero è inscritto in una circonferenza.  |
| 11 | Dimostra che ogni trapezio isoscele con il lato obliquo congruente alla semisomma delle basi è circoscrittibile ad una circonferenza.  |
| 12 | Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AB. Indicato con $C'$ il simmetrico del punto C rispetto all'ipotenusa AB, dimostra che il quadrilatero $AC'BC$ è inscrittibile in una circonferenza.   |
| 13 | Dagli estremi A e C del diametro della circonferenza $\gamma$ conduci le corde AB e CD parallele tra loro. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un rettangolo.  |
| 14 | E' dato l'angolo convesso $a\widehat{O}b$ , da un suo punto P interno all'angolo conduci le perpendicolari PH e PK ai lati dell'angolo. Dimostra che il quadrilatero PHOK si può inscrivere in una circonferenza.  |
| 15 | Sia ABCD un quadrilatero inscritto in una circonferenza e sia E il punto di intersezione dei prolungamenti dei suoi lati BC e AD. Dimostra che i triangoli CDE e ABE hanno gli angoli congruenti.  |
| 16 | Il trapezio rettangolo ABCD retto in A e D è circoscritto alla circonferenza di centro O. Sapendo che l'angolo $\widehat{C} \cong 2\widehat{B}$ calcola la misura delle ampiezze degli angoli del trapezio e dimostra che $AO \cong OD$ .  |
| 17 | Sia $\gamma$ una circonferenza di diametro AB. Traccia le rette a e b tangenti rispettivamente in A e B alla circonferenza. Siano C e D due punti appartenenti alla retta a, equidistanti dal punto A; da essi traccia le tangenti alla circonferenza indica con E e F i punti in cui tali tangenti incontrano la retta b. Dimostra che il quadrilatero CDFE è un trapezio isoscele. |

|    |   |
|----|---|
| 18 | Sia ABCD un quadrilatero inscritto in una circonferenza. Dimostra che, condotte le diagonali AC e BD, gli angoli $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ sono congruenti. Reciprocamente, dimostra che se in un quadrilatero ABCD gli angoli $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ sono congruenti, allora esso è inscrittibile.  |
| 19 | Dimostra che due lati opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, in cui una diagonale sia un diametro, si proiettano sull'altra diagonale secondo due segmenti congruenti.  |
| 20 | Traccia un segmento AB di punto medio M. Da parti opposte rispetto ad AB disegna due triangoli ABE e ABF aventi entrambi AB come ipotenusa. Dimostra che i punti E e F sono equidistanti da M e che il quadrilatero AEBF è inscrittibile.   |
| 21 | Sia dato un angolo convesso di vertice P. Da un punto A, interno all'angolo, conduci le distanze AB e AC ai lati dell'angolo $\hat{P}$ . Dimostra che il quadrilatero ABPC è inscrittibile in una circonferenza di diametro PA.   |
| 22 | Dimostra che, in un trapezio circoscritto a una circonferenza, l'angolo avente come vertice il centro della circonferenza e i lati passanti per gli estremi di un lato obliquo è retto.   |
| 23 | Sia ABC un triangolo rettangolo avente per base l'ipotenusa BC. Tracciata l'altezza AH, si mandino dal punto H le perpendicolari ai cateti indicando con E l'intersezione con AB e con D l'intersezione con AC. Dimostra che i punti A, E, H, D sono punti di una stessa circonferenza e che il quadrilatero EBCD è inscrittibile in una circonferenza. |
| 24 | Sia $\gamma$ una circonferenza di centro O e sia P il punto medio dell'arco AB. Traccia due corde congruenti PC e PD che intersecano la corda AB rispettivamente nei punti E e F. Dimostra che il quadrilatero CEFD è inscrittibile in una circonferenza.   |
| 25 | Sia ABCD un quadrato; sia M il punto medio del lato BC e sia E la proiezione del punto A sul segmento MD. Dimostra che il quadrilatero ABME è inscrittibile in una circonferenza; dimostra che $E\hat{A}B \cong C\hat{M}D$ e $A\hat{E}B \cong A\hat{M}B \cong C\hat{M}D$ . Dimostra, inoltre, che il triangolo ABE è isoscele sulla base AE.            |

|                   |   |
|-------------------|---|
| 26                | Sia $ABC$ un triangolo acutangolo. Considera sul lato $BC$ un punto $H$ e chiama $K$ e $R$ rispettivamente le proiezioni del punto $H$ sui lati $AB$ e $AC$ . Nell'ipotesi che il quadrilatero $BKRC$ sia inscrittibile in una circonferenza, dimostra che $\widehat{KBH}$ e $\widehat{KRH}$ sono angoli complementari e che il quadrilatero $AKHR$ è inscrittibile in una circonferenza. Dimostra, inoltre, che $\widehat{KRH} \cong \widehat{KAH}$ e che il punto $H$ è il piede dell'altezza relativa al lato $BC$ del triangolo $ABC$ . |
| 27                | Sia $ABCD$ un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza. Le diagonali di $ABCD$ si tagliano ad angolo retto nel punto $P$ . Traccia la distanza del punto $P$ dal lato $CD$ e prolungala fino ad incontrare il lato $AB$ nel punto $F$ . Dimostra che il punto $F$ è il punto medio del lato $AB$ .   |
| 28                | Sia $ABC$ un triangolo rettangolo avente per base l'ipotenusa $AB$ . Prendi su $AB$ un segmento $AD \cong AC$ . Dal punto $D$ conduci la perpendicolare al lato $AB$ che incontra $CB$ nel punto $E$ e il prolungamento di $AC$ in $F$ . Dimostra che $AE$ è bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ e che $CD$ è parallelo a $BF$ . Dimostra che il trapezio $CFBD$ è isoscele e che è inscrittibile in una circonferenza.  |
| poligoni regolari |   |
| 29                | Dimostra che un angolo di un poligono regolare viene diviso in angoli congruenti dalle diagonali uscenti dal suo vertice.   |
| 30                | Dimostra che il lato di un esagono regolare è congruente al raggio della circonferenza circoscritta.  |
| 31                | Dato un esagono regolare, dimostra che prolungando nei due sensi tre lati non consecutivi di esso si ottiene un triangolo equilatero in cui ogni lato è congruente al triplo di quello dell'esagono considerato.  |
| 32                | Dimostra che se una circonferenza è divisa in $n$ archi congruenti, il poligono che si ottiene congiungendo successivamente i punti di divisione è regolare.  |
| 33                | Disegna un pentagono regolare e dimostra che congiungendo i punti medi dei suoi lati si ottiene un altro pentagono regolare.  |

|    |  |
|----|--|
| 34 | Considera un pentagono regolare e dimostra che le due diagonali uscenti da un suo vertice dividono l'angolo in tre parti congruenti  |
| 35 | Dimostra che un poligono che sia inscrittibile e circoscrittibile a due circonferenze concentriche è regolare.   |
| 36 | Dimostra che l'apotema di un esagono regolare inscritto in una circonferenza è la metà del lato del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza.   |
| 37 | Dimostra che ogni poligono equilatero inscritto in una circonferenza è regolare.   |
| 38 | Dato un triangolo equilatero ABC, prolungando il lato CA di un segmento $AF \cong CA$ e facendo lo stesso per gli altri due lati AB e BC, si ottengono due punti G e E. Dimostra che il triangolo EFG è equilatero e che le due circonferenze circoscritte ai due triangoli ABC e EFG sono concentriche. |
| 39 | Dimostra che in un pentagono regolare ogni diagonale ne divide un'altra in due parti di cui la maggiore è congruente al lato del pentagono.  |
| 40 | Considera un poligono regolare di cinque o più lati e traccia le diagonali che congiungono i vertici non consecutivi di esso. Dimostra che tali congiungenti, incontrandosi, formano un poligono regolare.   |
| 41 | Dato un esagono regolare, costruisci su ciascuno dei suoi lati un quadrato. Dimostra che i vertici dei quadrati non comuni con l'esagono sono i vertici di un dodecagono regolare.   |
| 42 | Considera una circonferenza $\gamma$ e quattro rette $l, r, s, e t$ ad essa tangenti, a due a due parallele. Indicati con A, B, C, D, i punti di contatto con la circonferenza e con E, F, G, H i punti di intersezione delle rette fra loro, dimostra che EFGH è un rombo e che ABCD è un rettangolo.   |
| 43 | Dato un quadrato ABCD di diagonale AC, congiungi il punto medio M di AB con il punto medio N di AD e prolunga MN fino ad intersecare il prolungamento di CD in E. Dimostra che AMDE è un parallelogramma e che $AC \perp MN$ e $CN \perp AE$ .   |

## problemi vari

|    |  |
|----|--|
| 44 | Considera un trapezio ABCD rettangolo in A e D circoscritto a una semicirconferenza. Dimostra che il centro della semicirconferenza è il punto medio di AD.  |
| 45 | Il quadrilatero ABCD ha gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ che misurano rispettivamente $65^\circ$ e $117^\circ$ ; calcola il valore delle ampiezze degli altri angoli sapendo che il quadrilatero è inscritto in una circonferenza.         |
| 46 | Dagli estremi A e B del diametro della circonferenza $\gamma$ conduci le corde AC e BD parallele tra loro. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un rettangolo.  |
| 47 | Data una circonferenza $\gamma$ , dimostra che conducendo le tangenti da due suoi diametri si ottiene un rombo circoscritto alla circonferenza.  |
| 48 | Dal punto P esterno alla circonferenza $\gamma$ manda due secanti PA e PC le cui parti esterne sono rispettivamente PB e PD e tali che $PB \cong PD$ . Dimostra che il triangolo PAC è isoscele.   |
| 49 | Un trapezio ABCD con base maggiore AB è circoscritto ad una circonferenza di centro O. Dimostra che i triangoli COB e ADO sono rettangoli.   |
| 50 | Il trapezio isoscele ABCD è circoscritto alla circonferenza $\gamma$ . Sapendo che la base maggiore è tripla della minore, dimostra che gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano $60^\circ$ .  |
| 51 | Da un punto P esterno ad una circonferenza $\gamma$ manda due secanti che intercettino su $\gamma$ segmenti di uguale lunghezza. Dimostra che i quattro punti d'intersezione di dette secanti con $\gamma$ sono i vertici di un trapezio isoscele. |
| 52 | Dimostra che in ogni triangolo equilatero il raggio della circonferenza circoscritta misura il doppio del raggio della circonferenza inscritta al triangolo.   |
| 53 | E' dato il triangolo acutangolo ABC; siano AH e BK le altezze relative ai lati BC e AC. Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscritto in una circonferenza.  |

|    |   |
|----|---|
| 54 | Dimostra che le bisettrici di un quadrilatero convesso individuano un quadrilatero inscritto in una circonferenza.  |
| 55 | Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Indica con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa e con M e N i punti medi dei due cateti. Dimostra che i punti A, M, H, N appartengono alla stessa circonferenza.  |
| 56 | Sia G il baricentro di un triangolo qualsiasi ABC e siano M e N, rispettivamente, i punti medi dei lati AC e AB. Dimostra che il quadrilatero ANGM è circoscrittibile ad una circonferenza solo se la somma di AB e GB è congruente alla somma di AC e GC.    |
| 57 | Dimostra che la somma dei cateti di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei diametri della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al triangolo.   |
| 58 | E' dato l'esagono regolare ABCDEF di centro O; sia P il punto in cui si incontrano le rette AB e CD. Dimostra che il quadrilatero APCO è inscritto in una circonferenza.  |
| 59 | Il quadrilatero ABCD ha il perimetro congruente a 4 AD ed è circoscritto ad una circonferenza. Dimostra che $AB + CD \cong 2AD$ .   |
| 60 | E' dato l'arco AB della circonferenza $\gamma$ ed il suo punto medio P. Considera due corde PD e PE ed i punti F ed H intersezione di tali corde la corda AB. Dimostra che DEHF si può inscrivere in una circonferenza.                                       |
| 61 | Del triangolo rettangolo ABC considera l'altezza AH relativa all'ipotenusa BC. Sul cateto AB prendi il punto P tale che $AP \cong AH$ e sul cateto AC il punto Q tale che $CQ \cong HC$ . Dimostra che il quadrilatero APHQ è inscritto in una circonferenza. |