

## triangoli inscritti e circoscritti

1	Dimostra che ogni trapezio isoscele con il lato obliquo congruente alla semisomma delle basi è circoscrittibile ad una circonferenza.
2	Dimostra che, se in un triangolo il centro della circonferenza inscritta coincide con il centro della circonferenza circoscritta, il triangolo dato è equilatero.
3	Data una circonferenza $\gamma$ di centro $O$ , sia $ABC$ un triangolo inscritto in essa e sia $H$ il piede della perpendicolare condotta da $C$ ad $AB$ . Dimostra che $\widehat{ACH} \cong \widehat{OCB}$ .
4	Dimostra che il punto di incontro delle tre bisettrici di un triangolo è il centro del cerchio inscritto in esso.
5	Dimostra che, se il centro della circonferenza inscritta in un triangolo $ABC$ appartiene all'altezza relativa ad $AB$ , allora il triangolo $ABC$ è isoscele sulla base $AB$ .
6	Considera un triangolo isoscele $ABC$ di vertice $C$ , circoscritto ad un cerchio di centro $O$ ; siano $Q$ e $P$ i punti di tangenza con i due lati congruenti $CB$ e $AC$ e sia $R$ il punto di tangenza con la base. Dimostra che il perimetro del triangolo dato è congruente a $4QB + 2QC$ .
7	Considera un triangolo rettangolo circoscritto a una circonferenza. Dimostra che il diametro della circonferenza è congruente alla differenza fra l'ipotenusa e la somma dei cateti.
8	Dimostra che, a seconda che un triangolo sia acutangolo, ottusangolo, rettangolo, il centro della circonferenza circoscritta al triangolo cade nell'interno, esternamente o sul contorno del triangolo.
9	Nel triangolo rettangolo $ABC$ considera la circonferenza inscritta e la circonferenza circoscritta. Dimostra che il diametro della circonferenza inscritta è congruente alla differenza tra la somma dei cateti e l'ipotenusa. Dimostra che la somma dei due diametri è congruente alla somma dei cateti.

## quadrilateri inscritti e circoscritti

10	Il quadrilatero ABCD ha gli angoli in $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ che misurano rispettivamente $65^\circ$ e $117^\circ$ ; calcola il valore delle ampiezze degli altri angoli sapendo che il quadrilatero è inscritto in una circonferenza.
11	Dimostra che ogni trapezio isoscele con il lato obliquo congruente alla semisomma delle basi è circoscrittibile ad una circonferenza.
12	Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AB. Indicato con $C'$ il simmetrico del punto C rispetto all'ipotenusa AB, dimostra che il quadrilatero $AC'BC$ è inscritto in una circonferenza.
13	Dagli estremi A e C del diametro della circonferenza $\gamma$ conduci le corde AB e CD parallele tra loro. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un rettangolo.
14	E' dato l'angolo convesso $a\widehat{O}b$ , da un suo punto P interno all'angolo conduci le perpendicolari PH e PK ai lati dell'angolo. Dimostra che il quadrilatero PHOK si può inscrivere in una circonferenza.
15	Sia ABCD un quadrilatero inscritto in una circonferenza e sia E il punto di intersezione dei prolungamenti dei suoi lati BC e AD. Dimostra che i triangoli CDE e ABE hanno gli angoli congruenti.
16	Il trapezio rettangolo ABCD retto in A e D è circoscritto alla circonferenza di centro O. Sapendo che l'angolo $\widehat{C} \cong 2\widehat{B}$ calcola la misura delle ampiezze degli angoli del trapezio e dimostra che $AO \cong OD$ .
17	Sia $\gamma$ una circonferenza di diametro AB. Traccia le rette a e b tangenti rispettivamente in A e B alla circonferenza. Siano C e D due punti appartenenti alla retta a, equidistanti dal punto A; da essi traccia le tangenti alla circonferenza indica con E e F i punti in cui tali tangenti incontrano la retta b. Dimostra che il quadrilatero CDFE è un trapezio isoscele.

18	Sia ABCD un quadrilatero inscritto in una circonferenza. Dimostra che, condotte le diagonali AC e BD, gli angoli $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ sono congruenti. Reciprocamente, dimostra che se in un quadrilatero ABCD gli angoli $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ sono congruenti, allora esso è inscrittibile.
19	Dimostra che due lati opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, in cui una diagonale sia un diametro, si proiettano sull'altra diagonale secondo due segmenti congruenti.
20	Traccia un segmento AB di punto medio M. Da parti opposte rispetto ad AB disegna due triangoli ABE e ABF aventi entrambi AB come ipotenusa. Dimostra che i punti E e F sono equidistanti da M e che il quadrilatero AEBF è inscrittibile.
21	Sia dato un angolo convesso di vertice P. Da un punto A, interno all'angolo, conduci le distanze AB e AC ai lati dell'angolo $\hat{P}$ . Dimostra che il quadrilatero ABPC è inscrittibile in una circonferenza di diametro PA.
22	Dimostra che, in un trapezio circoscritto a una circonferenza, l'angolo avente come vertice il centro della circonferenza e i lati passanti per gli estremi di un lato obliquo è retto.
23	Sia ABC un triangolo rettangolo avente per base l'ipotenusa BC. Tracciata l'altezza AH, si mandino dal punto H le perpendicolari ai cateti indicando con E l'intersezione con AB e con D l'intersezione con AC. Dimostra che i punti A, E, H, D sono punti di una stessa circonferenza e che il quadrilatero EBCD è inscrittibile in una circonferenza.
24	Sia $\gamma$ una circonferenza di centro O e sia P il punto medio dell'arco AB. Traccia due corde congruenti PC e PD che intersecano la corda AB rispettivamente nei punti E e F. Dimostra che il quadrilatero CEFD è inscrittibile in una circonferenza.
25	Sia ABCD un quadrato; sia M il punto medio del lato BC e sia E la proiezione del punto A sul segmento MD. Dimostra che il quadrilatero ABME è inscrittibile in una circonferenza; dimostra che $E\hat{A}B \cong C\hat{M}D$ e $A\hat{E}B \cong A\hat{M}B \cong C\hat{M}D$ . Dimostra, inoltre, che il triangolo ABE è isoscele sulla base AE.

26	Sia ABC un triangolo acutangolo. Considera sul lato BC un punto H e chiama K e R rispettivamente le proiezioni del punto H sui lati AB e AC. Nell'ipotesi che il quadrilatero BKRC sia inscrittibile in una circonferenza, dimostra che $\widehat{KBH}$ e $\widehat{KRH}$ sono angoli complementari e che il quadrilatero AKHR è inscrittibile in una circonferenza. Dimostra, inoltre, che $\widehat{KRH} \cong \widehat{KAH}$ e che il punto H è il piede dell'altezza relativa al lato BC del triangolo ABC.
27	Sia ABCD un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza. Le diagonali di ABCD si tagliano ad angolo retto nel punto P. Traccia la distanza del punto P dal lato CD e prolungala fino ad incontrare il lato AB nel punto F. Dimostra che il punto F è il punto medio del lato AB.
28	Sia ABC un triangolo rettangolo avente per base l'ipotenusa AB. Prendi su AB un segmento $AD \cong AC$ . Dal punto D conduci la perpendicolare al lato AB che incontra CB nel punto E e il prolungamento di AC in F. Dimostra che AE è bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ e che CD è parallelo a BF. Dimostra che il trapezio CFBD è isoscele e che è inscrittibile in una circonferenza.
<b>poligoni regolari</b>	
29	Dimostra che un angolo di un poligono regolare viene diviso in angoli congruenti dalle diagonali uscenti dal suo vertice.
30	Dimostra che il lato di un esagono regolare è congruente al raggio della circonferenza circoscritta.
31	Dato un esagono regolare, dimostra che prolungando nei due sensi tre lati non consecutivi di esso si ottiene un triangolo equilatero in cui ogni lato è congruente al triplo di quello dell'esagono considerato.
32	Dimostra che se una circonferenza è divisa in n archi congruenti, il poligono che si ottiene congiungendo successivamente i punti di divisione è regolare.
33	Disegna un pentagono regolare e dimostra che congiungendo i punti medi dei suoi lati si ottiene un altro pentagono regolare.

34	Considera un pentagono regolare e dimostra che le due diagonali uscenti da un suo vertice dividono l'angolo in tre parti congruenti
35	Dimostra che un poligono che sia inscrittibile e circoscrittibile a due circonferenze concentriche è regolare.
36	Dimostra che l'apotema di un esagono regolare inscritto in una circonferenza è la metà del lato del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza.
37	Dimostra che ogni poligono equilatero inscritto in una circonferenza è regolare.
38	Dato un triangolo equilatero ABC, prolungando il lato CA di un segmento $AF \cong CA$ e facendo lo stesso per gli altri due lati AB e BC, si ottengono due punti G e E. Dimostra che il triangolo EFG è equilatero e che le due circonferenze circoscritte ai due triangoli ABC e EFG sono concentriche.
39	Dimostra che in un pentagono regolare ogni diagonale ne divide un'altra in due parti di cui la maggiore è congruente al lato del pentagono.
40	Considera un poligono regolare di cinque o più lati e traccia le diagonali che congiungono i vertici non consecutivi di esso. Dimostra che tali congiungenti, incontrandosi, formano un poligono regolare.
41	Dato un esagono regolare, costruisci su ciascuno dei suoi lati un quadrato. Dimostra che i vertici dei quadrati non comuni con l'esagono sono i vertici di un dodecagono regolare.
42	Considera una circonferenza $\gamma$ e quattro rette $l, r, s, e t$ ad essa tangenti, a due a due parallele. Indicati con A, B, C, D, i punti di contatto con la circonferenza e con E, F, G, H i punti di intersezione delle rette fra loro, dimostra che EFGH è un rombo e che ABCD è un rettangolo.
43	Dato un quadrato ABCD di diagonale AC, congiungi il punto medio M di AB con il punto medio N di AD e prolunga MN fino ad intersecare il prolungamento di CD in E. Dimostra che AMDE è un parallelogramma e che $AC \perp MN$ e $CN \perp AE$ .

## problemi vari

44	Considera un trapezio ABCD rettangolo in A e D circoscritto a una semicirconferenza. Dimostra che il centro della semicirconferenza è il punto medio di AD.
45	Il quadrilatero ABCD ha gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ che misurano rispettivamente $65^\circ$ e $117^\circ$ ; calcola il valore delle ampiezze degli altri angoli sapendo che il quadrilatero è inscritto in una circonferenza.
46	Dagli estremi A e B del diametro della circonferenza $\gamma$ conduci le corde AC e BD parallele tra loro. Dimostra che il quadrilatero ABCD è un rettangolo.
47	Data una circonferenza $\gamma$ , dimostra che conducendo le tangenti da due suoi diametri si ottiene un rombo circoscritto alla circonferenza.
48	Dal punto P esterno alla circonferenza $\gamma$ manda due secanti PA e PC le cui parti esterne sono rispettivamente PB e PD e tali che $PB \cong PD$ . Dimostra che il triangolo PAC è isoscele.
49	Un trapezio ABCD con base maggiore AB è circoscritto ad una circonferenza di centro O. Dimostra che i triangoli COB e ADO sono rettangoli.
50	Il trapezio isoscele ABCD è circoscritto alla circonferenza $\gamma$ . Sapendo che la base maggiore è tripla della minore, dimostra che gli angoli adiacenti alla base maggiore misurano $60^\circ$ .
51	Da un punto P esterno ad una circonferenza $\gamma$ manda due secanti che intercettino su $\gamma$ segmenti di uguale lunghezza. Dimostra che i quattro punti d'intersezione di dette secanti con $\gamma$ sono i vertici di un trapezio isoscele.
52	Dimostra che in ogni triangolo equilatero il raggio della circonferenza circoscritta misura il doppio del raggio della circonferenza inscritta al triangolo.
53	E' dato il triangolo acutangolo ABC; siano AH e BK le altezze relative ai lati BC e AC. Dimostra che il quadrilatero ABHK è inscritto in una circonferenza.

54	Dimostra che le bisettrici di un quadrilatero convesso individuano un quadrilatero inscritto in una circonferenza.
55	Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Indica con H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa e con M e N i punti medi dei due cateti. Dimostra che i punti A, M, H, N appartengono alla stessa circonferenza.
56	Sia G il baricentro di un triangolo qualsiasi ABC e siano M e N, rispettivamente, i punti medi dei lati AC e AB. Dimostra che il quadrilatero ANGM è circoscrittibile ad una circonferenza solo se la somma di AB e GB è congruente alla somma di AC e GC.
57	Dimostra che la somma dei cateti di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei diametri della circonferenza inscritta e della circonferenza circoscritta al triangolo.
58	E' dato l'esagono regolare ABCDEF di centro O; sia P il punto in cui si incontrano le rette AB e CD. Dimostra che il quadrilatero APCO è inscritto in una circonferenza.
59	Il quadrilatero ABCD ha il perimetro congruente a 4 AD ed è circoscritto ad una circonferenza. Dimostra che $AB + CD \cong 2AD$ .
60	E' dato l'arco AB della circonferenza $\gamma$ ed il suo punto medio P. Considera due corde PD e PE ed i punti F ed H intersezione di tali corde la corda AB. Dimostra che DEHF si può inscrivere in una circonferenza.
61	Del triangolo rettangolo ABC considera l'altezza AH relativa all'ipotenusa BC. Sul cateto AB prendi il punto P tale che $AP \cong AH$ e sul cateto AC il punto Q tale che $CQ \cong HC$ . Dimostra che il quadrilatero APHQ è inscritto in una circonferenza.