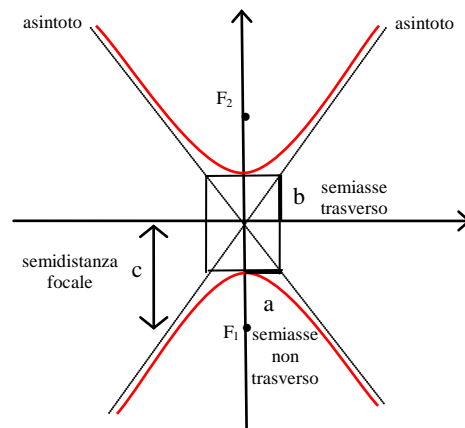
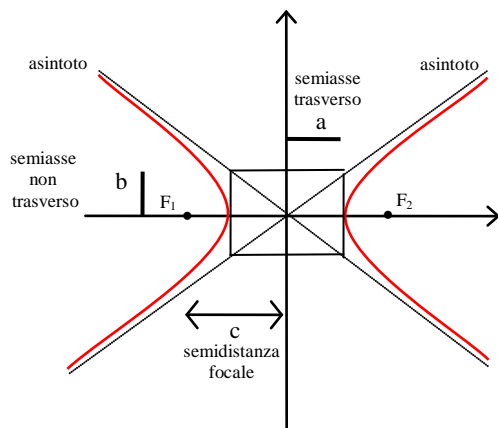


# Iperbole

## definizione

L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano tali che la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi  $F_1$  e  $F_2$  detti fuochi è costante:  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = costante$



per la dimostrazione dell'equazione clicca qui oppure vedi la sezione Teoria e Pratica

iperbole di centro l'origine e fuochi sull'asse x

iperbole di centro l'origine e fuochi sull'asse y

equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a > b$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$a < b$$

relazione tra i parametri a, b, c

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

coordinate del fuoco

$$F_1(-c; 0)$$

$$F_2(c; 0)$$

$$F_1(0; -c)$$

$$F_2(0; c)$$

equazioni degli asintoti

$$y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

eccentricità

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e > 1$$

$$e = \frac{c}{b}$$

$$e > 1$$

in generale: l'eccentricità è il rapporto tra la semidistanza focale e il semiasse maggiore

## ricerca dell'equazione di una iperbole

equazione dell'iperbole noti i fuochi ed il semiasse trasverso

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

- si applica la definizione di iperbole ricordando che la costante è uguale a  $2a$

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

- si calcolano le due distanze  $\overline{PF_1}$  e  $\overline{PF_2}$

$$\left( \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = 4a^2$$

- si elevano al quadrato entrambi i membri

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

- si sviluppano i calcoli e si isola il radicale rimasto
- si elevano di nuovo al quadrato entrambi i membri
- si sviluppano i calcoli e si ottiene l'equazione dell'iperbole in forma non canonica

# Iperbole

equazione dell'iperbole passante per due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$	
$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>nell'equazione dell'iperbole in forma canonica si effettua la sostituzione <math>\frac{1}{a^2} = \alpha</math> e <math>\frac{1}{b^2} = \beta</math></li> </ul>
$\alpha x_1^2 - \beta y_1^2 = 1$ $\alpha x_2^2 - \beta y_2^2 = 1$	<p style="text-align: center;"><i>passaggio per A</i> <i>passaggio per B</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>si sostituiscono uno alla volta le coordinate dei punti nell'equazione precedente</li> </ul>
$\begin{cases} \alpha x_1^2 - \beta y_1^2 = 1 \\ \alpha x_2^2 - \beta y_2^2 = 1 \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si risolve il sistema di primo grado nelle incognite <math>\alpha</math> e <math>\beta</math></li> </ul>
$\alpha x^2 - \beta y^2 = 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si sostituiscono i valori ottenuti nell'equazione iniziale ottenendo così l'equazione richiesta</li> </ul>


in generale	
per trovare l'equazione di una iperbole è necessario:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>avere due condizioni (scelte tra: fuoco, semiassi, passaggio per un punto, eccentricità, retta tangente)</li> <li>trasformare ogni condizione in una equazione</li> <li>ottenere il sistema delle due equazioni nelle incognite <math>a^2</math> e <math>b^2</math></li> <li>risolvere il sistema e trovare i valori di <math>a^2</math> e <math>b^2</math></li> <li>sostituire i valori ottenuti nell'equazione dell'iperbole, ottenendo l'equazione cercata</li> </ul>	
<p>nota che nella ricerca dell'equazione dell'iperbole:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>le incognite sono <math>a^2</math> e <math>b^2</math> e non <math>a</math> e <math>b</math></li> <li>conviene imporre le condizioni note a partire dall'equazione dell'iperbole in forma non canonica <math>b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2</math></li> </ul>	

## ricerca delle equazioni delle rette tangenti all'iperbole

equazioni delle rette tangenti condotte da un punto $P_0(x_0, y_0)$ esterno all'iperbole	
$y - y_0 = m(x - x_0)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si scrive l'equazione del fascio di rette proprio di centro <math>P_0(x_0, y_0)</math></li> </ul>
$y = y_0 + m(x - x_0)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si ricava la <math>y</math> dell'equazione del fascio</li> </ul>
$b^2x^2 - a^2[y_0 + m(x - x_0)]^2 = a^2b^2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si sostituisce la <math>y</math> nell'equazione dell'iperbole in forma non canonica <math>b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2</math></li> </ul>
$y - y_0 = m_1(x - x_0)$ $y - y_0 = m_2(x - x_0)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla <math>x</math></li> <li>si ricava il <math>\Delta</math> e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed iperbole)</li> <li>si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita <math>m</math> ricavando i valori <math>m_1</math> ed <math>m_2</math></li> <li>si sostituiscono <math>m_1</math> ed <math>m_2</math> nell'equazione del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti</li> </ul>
equazione della retta tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$ dell'iperbole: <u>formula di sdoppiamento</u>	
$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si scrive l'equazione dell'iperbole in forma non canonica</li> <li>si pone <math>x^2 = x_0 \cdot x</math> e <math>y^2 = y_0 \cdot y</math></li> </ul>
$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si sostituiscono le incognite sdoppiate nella equazione dell'iperbole</li> <li>sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione della retta tangente nel punto <math>P_0(x_0, y_0)</math></li> </ul>

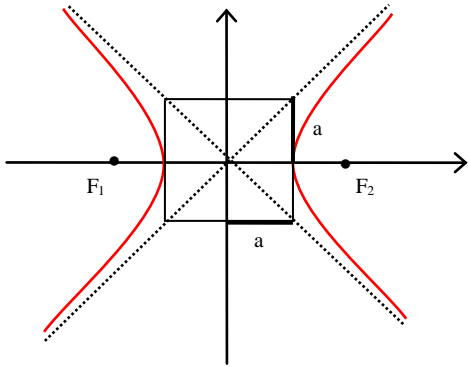
# Iperbole

## equazione delle rette tangenti di coefficiente angolare $m$ assegnato

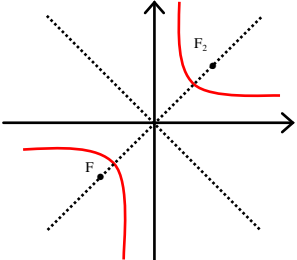
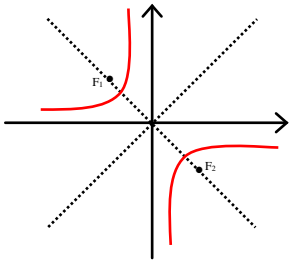
$y = mx + q$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si scrive l'equazione del fascio di rette improprio con <math>m</math> assegnato</li> </ul>
$b^2x^2 - a^2[mx + q]^2 = a^2b^2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si sostituisce la <math>y</math> nell'equazione dell'iperbole in forma non canonica <math>b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2</math></li> </ul>
$y = mx + q_1$ $y = mx + q_2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>si sviluppano i calcoli e si ordina l'equazione rispetto alla <math>x</math></li> <li>si ricava il <math>\Delta</math> e lo si impone uguale a 0 (condizione di tangenza tra retta ed iperbole)</li> <li>si risolve l'equazione di secondo grado nell'incognita <math>q</math> ricavando i valori di <math>q_1</math> e <math>q_2</math></li> <li>si sostituiscono <math>q_1</math> e <math>q_2</math> nell'equazione iniziale del fascio ottenendo le equazioni delle rette tangenti</li> </ul>
 in alcuni problemi $m$ si ricava nota la retta parallela o la perpendicolare alla retta tangente	

## iperbole equilatera

L'iperbole si dice equilatera se i semiassi sono uguali:  $a = b$

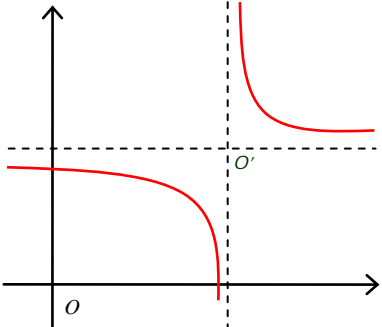
	$x^2 - y^2 = a^2$	equazione
	$c = a\sqrt{2}$	relazione tra $a$ , $c$
	$F_1(-c; 0)$ $F_2(c; 0)$	coordinate dei fuochi
	$y = -x$ $y = x$	equazioni asintoti
	$e = \frac{c}{a}$ $e > 1$	eccentricità
nell'iperbole equilatera gli asintoti coincidono con le bisettrici del I e III e del II e IV quadrante		

## iperbole equilatera ruotata di $\pm 45^\circ$

	$xy = k$ $k > 0$  $F_1(-\sqrt{2k}; -\sqrt{2k})$ $F_2(\sqrt{2k}; \sqrt{2k})$		$xy = k$ $k < 0$  $F_1(-\sqrt{-2k}; \sqrt{-2k})$ $F_2(\sqrt{-2k}; -\sqrt{-2k})$
---	--	--	--

## funzione omografica

Si dice funzione omografica, l'iperbole equilatera ruotata di  $45^\circ$  e traslata rispetto all'origine degli assi cartesiani

	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$	$c \neq 0$ $ad - bc \neq 0$	equazione
	$O' \left( -\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right)$		coordinate di $O'$
	$x = -\frac{d}{c}$	$y = \frac{a}{c}$	equazioni asintoti